Fundamentos de Fenômenos de Transporte

AULA 2.1

Teorema de Vashy-Buckingham-Riabouchinsky

ou

TEOREMA DOS π

TEOREMA DOS π

Um procedimento bastante difundido para obtenção dos adimensionais é aquele que se baseia no teorema de Vashy-Buckingham-Riabouchinsky, em homenagem aos seus primeiros autores. Basicamente, esse teorema descreve o procedimento para a obtenção de adimensionais denominados pela letra grega *Pi*.

Por esse motivo, esse teorema se popularizou com o nome de teorema Pi de Buckingham.

TEOREMA DOS π

Aplicaremos o procedimento delineado no teorema Pi de Buckingham, por exemplo, na obtenção dos adimensionais que controlam a força de arrasto na esfera, que já sabemos de antemão serem os números de Reynolds e de Euler.

Esse procedimento envolve as seguintes cinco etapas:

TEOREMA DOS π

1- Listar e contar as <u>n</u> grandezas que controlam o fenômeno. Liste todos os parâmetros dimensionais envolvidos.

A melhor forma de fazer isto é escrever a função envolvendo as grandezas que controlam o fenômeno que está sendo estudado na forma $f(F, \rho, v, D, \mu) = 0$, onde fica fácil contar as n grandezas envolvidas.

Verifica-se, no caso, que n = 5.

TEOREMA DOS π

2- Escrever a base dimensional fundamental completa que permita expressar as unidades de todas as grandezas. Selecione um conjunto de dimensões fundamentais (primárias) (MLT, FLT).

Em problemas da Mecânica dos Fluidos, normalmente é suficiente escrever a base dimensional fundamental da mecânica; qual seja: M (massa), L (comprimento), T (tempo). O número **m** de elementos desta base é três e, assim, m = 3.

Observe que no caso de um problema cinemático, a base dimensional fundamental completa é: L (comprimento), T (tempo).

TEOREMA DOS π

2- Escrever a base dimensional fundamental completa que permita expressar as unidades de todas as grandezas.

Já no caso de um problema termo-fluido, há necessidade da inclusão da base dimensional de temperatura e, nesse caso, a base dimensional fundamental completa seria: M (massa), L (comprimento), T (tempo), θ (temperatura).

Uma vez cumprida esta etapa, já se sabe o número de adimensionais que serão gerados pelo procedimento, e que será dado por:

número de adimensionais = m = n – r , m = 5 – 3 = 2.

n – número de grandezas envolvidas no fenômeno

r – número de grandezas fundamentais do fenômeno

m – números de admensionais independentes

TEOREMA DOS π

3- Escolha dos elementos da 'nova base'. Listar as dimensões de todos os parâmetros em termos das dimensões primárias.

Escolhem-se entre as grandezas listadas, aquelas que possam servir como uma nova base adimensional.

Em outras palavras, precisamos escolher entre as grandezas listadas na 1ª etapa, uma delas para servir de base dimensional de massa, uma segunda grandeza para servir de base dimensional de comprimento, e uma terceira grandeza para servir de base dimensional de tempo.

TEOREMA DOS π

3- Escolha dos elementos da 'nova base'.

Uma alternativa é adotar a massa específica ρ, com unidades $[\rho] = ML^{-3}$, como base dimensional de massa, o diâmetro D da esfera, com unidades $[D] = L$, como base dimensional de comprimento e a velocidade v, com unidades $[v] = LT^{-1}$, como base dimensional de tempo.

Observe que essa escolha não é exclusiva, sendo a única exigência que a grandeza utilizada para servir de elemento da nova base deva conter, em suas unidades, obviamente, o elemento que será substituído na base dimensional original.

TEOREMA DOS π

3- Escolha dos elementos da 'nova base'.

Assim, no lugar da velocidade v, poderíamos, por exemplo, adotar a viscosidade μ, com unidades $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$, como base dimensional de tempo da nova base, uma vez que T faz parte das unidades de viscosidade.

Essa flexibilidade de escolha dos elementos da nova base implica em adimensionais assumindo diferentes formas para um mesmo problema, o que, na prática, não apresenta nenhum inconveniente.

TEOREMA DOS π

3- Escolha dos elementos da 'nova base'.

Contudo, a base preferencial da Mecânica dos Fluidos é ρ,v,D, que se recomenda seja escolhida quando presente em determinado problema, para que os adimensionais resultantes dessa escolha resultem escritos na forma usual.

TEOREMA DOS π

4- Construção dos adimensionais

Como sabemos da 2ª etapa que serão gerados dois adimensionais, π_1 e π_2, constroem-se os adimensionais com os elementos da nova base ρ,v,D, todos eles afetados por expoentes a serem determinados, além de incluir em cada um dos adimensionais uma das grandezas que não fizeram parte da 'nova base'.

Assim, π_1 será construído incluindo a força F e π_2 incluindo a viscosidade μ.

TEOREMA DOS π

4- Construção dos adimensionais

Os adimensionais terão então as seguintes formas:

$$\pi_1 = (\rho^a v^b D^c)F$$

$$\pi_2 = (\rho^d v^e D^f)\mu$$

Onde a, b, c, d, e, f são expoentes a serem determinados.

TEOREMA DOS π

4- Construção dos adimensionais

Esses expoentes serão obtidos substituindo-se cada grandeza pela equação dimensional correspondente, ou seja,

$$\pi_1 = (ML^{-3})^a \cdot (LT^{-1})^b \cdot (L)^c \cdot MLT^{-2}$$

$$\pi_2 = (ML^{-3})^d \cdot (LT^{-1})^e \cdot (L)^f \cdot ML^{-1}T^{-1}$$

TEOREMA DOS π

4- Construção dos adimensionais

Ocorre que π_1 e π_2 são adimensionais; logo,

$$M^0L^0T^0 = (ML^{-3})^a \cdot (LT^{-1})^b \cdot (L)^c \cdot MLT^{-2}$$

$$M^0L^0T^0 = (ML^{-3})^d \cdot (LT^{-1})^e \cdot (L)^f \cdot ML^{-1}T^{-1}$$

TEOREMA DOS π

4- Construção dos adimensionais

Observe, nessas equações dimensionais, que os elementos da nova base foram utilizados para adimensionalizar F, na primeira equação e μ na segunda equação, permitindo obter os expoentes dos elementos da nova base, que tornarão adimensionais os monômios π_1 e π_2.

Igualando os expoentes de mesma base nas equações dimensionais, resulta em dois sistemas de equações algébricas que, uma vez resolvidos, fornecem os expoentes a, b, c, d, e, f.

TEOREMA DOS π

4- Construção dos adimensionais

$$\pi_1 \begin{cases} M: a + 1 = 0 \\ L: -3a + b + c + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1;\ b = -2;\ c = -2 \\ T: -b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_2 \begin{cases} M: d + 1 = 0 \\ L: -3d + e + f - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -1;\ e = -1;\ f = -1 \\ T: -e - 1 = 0 \end{cases}$$

TEOREMA DOS π

5- Escrever os adimensionais

Uma vez tendo sido determinados os expoentes das equações dimensionais, resta escrever os adimensionais π_1 e π_2, ou seja,

$$\pi_1 = \rho^{-1} v^{-2} D^{-2} F = \frac{F}{\rho v^2 D^2}$$

$$\pi_2 = \rho^{-1} v^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho v D}$$

TEOREMA DOS π

5- Escrever os adimensionais

Onde reconhece-se que π_1 como o número de Euler e π_2 como o inverso do número de Reynolds. Contudo, a maneira usual de se expressar o número de Reynolds é na forma $Re = \pi_2^{-1}$, que, não obstante, continua sendo adimensional.

TEOREMA DOS π

EXEMPLOS

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 1

Verificou-se em laboratório que a força de arrasto, que age numa esfera lisa que se movimenta que se movimenta num fluido, é dada por uma função do tipo $F = f(v, D, \rho, \mu)$.

Determinar a função de números adimensionais, equivalente à função indicada.

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 2

A velocidade de um corpo em queda livre é função somente da aceleração da gravidade g e da altura de queda h.

Determinar a função de números adimensionais referente ao fenômeno.

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 3

A pressão efetiva p, num ponto genérico de um líquido em repouso, é função da massa específica ρ, da aceleração da gravidade g e da profundidade do ponto h em relação à superfície livre do líquido.

Determinar a equação de pressões.

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 3

RESOLUÇÃO:

$$p = f(\rho, g, h)$$

$$f(p, \rho, g, h) = 0 \quad \rightarrow \quad f(\pi) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} [p] &= FL^{-2} \\ [\rho] &= FL^{-4}T^{2} \\ [g] &= L^{2}T^{-1} \\ [h] &= L \end{aligned}\right\} \quad m = n - r = 4 - 3 = 1$$

Como só existe um adimensional, ele será uma constante.

$$\pi = \frac{p}{\rho g h} = C \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = C\rho g h}$$

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 4

Determinar uma expressão para o período de oscilação de um pêndulo simples, de comprimento L, que oscila com amplitude reduzida devido unicamente à ação da gravidade.

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 4

RESOLUÇÃO

$$f(T, \ell, g) = 0$$

$$\pi = \ell^{\alpha_1} g^{\alpha_2} T \quad \rightarrow \quad \pi = L^{\alpha_1} L^{\alpha_2} T^{-2\alpha_2} T \quad \rightarrow \quad \pi = L^{\alpha_1+\alpha_2} T^{-2\alpha_2+1}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$-2\alpha_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\pi = \ell^{-\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} T = T\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

TEOREMA DOS π

EXEMPLO 5

Em velocidades relativamente muito altas, o arrasto sobre um objeto é independentemente da viscosidade do fluído. Desse modo, a força de arrasto aerodinâmico, F, sobre um automóvel é uma função somente da velocidade, V, da massa específica do ar, ρ, e do tamanho do veículo, caracterizado pela sua força frontal, A. Use a análise dimensional para determinar como a força de arrasto F depende da velocidade V.

Resolução:

1 – Listar as grandezas do fenômeno:

1) F V ρ A n = 4 parâmetros

2) Selecionar as dimensões primarias: M, L e t

3) Escolher os elementos da nova fase:

r = 3 dimensões primárias

$$F = \frac{M}{Lt^2} \qquad \mathrm{V} = \frac{L}{t} \qquad \rho = \frac{M}{L^3} \qquad \mathrm{A} = \mathrm{L}^2$$

4) Três parâmetros repetentes: V ρ A m – n = 4 – 3 = 1

Resolução:

5) Construção dos adimensionais:

$$\Pi_1 = V^a \rho^b A^c F$$

$$= \left(\frac{L}{t}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(L^2\right)^c \frac{ML}{t^2} = M^0 L^0 t^0$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{array}{rc|l} M: & b+1=0 & b=-1 \\ L: & a-3b+2c+1=0 & c=-1 \\ t: & -a-2=0 & a=-2 \end{array}$$

Substituindo, temos:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 A}$$

Checando se F, L e t são dimensões primárias:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\frac{Ft^2}{L^4}\frac{L^2}{t^2}L^2} = [1]$$

Portanto:

$F \propto \rho V^2 A \propto V^2$

Então a força de arrasto é dependente da Velocidade ao quadrado